

Chapitre 06 Calcul vectoriel

1CRSA

2024-2025

Y. Carrat

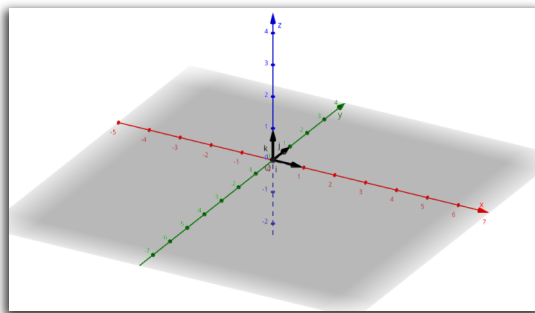


Table des matières

Introduction	3
I - Points et Vecteurs de l'espace	4
1. Coordonnées.....	4
2. Calculs de longueurs	5
II - Produit scalaire dans l'espace	6
1. 1ère approche	6
2. Produit scalaire et coordonnées.....	6
III - Produit vectoriel	7
1. Orientation de l'espace	7
2. Introduction au produit vectoriel	7
3. Produit vectoriel et coordonnées	8

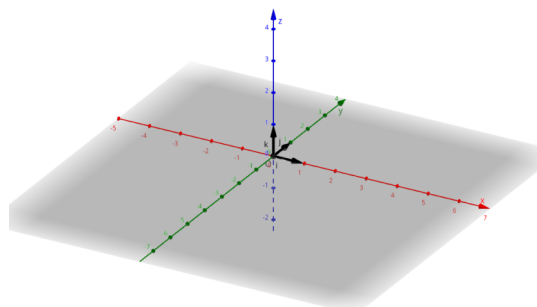
Introduction



Dans toute la suite de ce document on travaillera dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

.

Le plan de base représenté en grisé est le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ noté éventuellement (xOy) .



Points et Vecteurs de l'espace



1. Coordonnées

Coordonnées d'un point de l'espace



Définition

Les coordonnées d'un point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $(x; y; z)$ si :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

x est l'**abscisse du point M** dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

y est l'**ordonnée du point M** dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

z est la **cote du point M** dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $(x; y; z)$ s'appelle une **base orthonormale** de l'espace.

Coordonnées d'un vecteur



Fondamental

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Coordonnées du milieu d'un segment



Fondamental

Coordonnées du point I , milieu du segment $[AB]$:

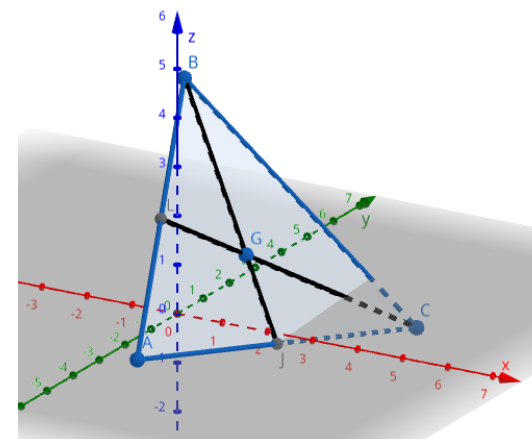
$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}; z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Coordonnées du centre de gravité d'un triangle



Coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} ; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$



2. Calculs de longueurs

Longueur d'un segment



Longueur du segment $[AB]$: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Norme d'un vecteur



Norme du vecteur $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{(x_{\vec{u}})^2 + (y_{\vec{u}})^2 + (z_{\vec{u}})^2}$

Produit scalaire dans l'espace



1. 1ère approche

Produit scalaire de deux vecteurs



Définition

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le NOMBRE, noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Reconnaître des vecteurs orthogonaux



Méthode

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}$$

2. Produit scalaire et coordonnées



Fondamental

Calculer le produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormale

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

où x, y et z sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et x', y' et z' celles du vecteur $\vec{v}$.



Complément

Le produit scalaire permet de calculer facilement les coordonnées d'un vecteur en fonction de l'angle que fait ce vecteur avec chaque vecteur de base.

En effet :

- .
- .
- .
- .
- .

Produit vectoriel



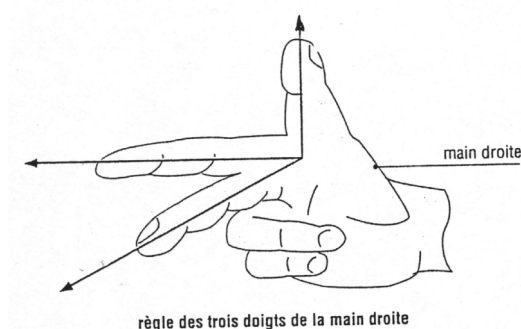
1. Orientation de l'espace

Orientation de l'espace



Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (dans cet ordre) est *directe* si elle suit la « règle des trois doigts de la main droite ».



Remarque

Cette règle permet de définir le sens trigonométrique dans chacun des trois plans de base.

Par exemple, dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad alors que } (\widehat{\vec{j}, \vec{i}}) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

2. Introduction au produit vectoriel



Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Le *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est **le vecteur**, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (se lit « $\vec{u}$ Vectoriel $\vec{v}$ »), tel que :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta) \vec{w}$$

où $\vec{w}$ est le vecteur-unité tel que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ suivent la « règle des trois doigts de la main droite ».

? Exemple

Avec les vecteurs de base :

- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \dots\dots\dots$
- $\vec{j} \wedge \vec{k} = \dots\dots\dots$
- $\vec{k} \wedge \vec{i} = \dots\dots\dots$
- $\vec{i} \wedge \vec{k} = \dots\dots\dots$

💡 Fondamental

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$

🔍 Remarque

Le produit vectoriel permet donc d'identifier par le calcul des vecteurs colinéaires de l'espace.

3. Produit vectoriel et coordonnées

💡 Fondamental

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives x, y et z et x', y' et z' dans la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Alors les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

📐 Complément

Comparer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ avec celles de $\vec{v} \wedge \vec{u}$:

-
-
-
-
-
-
-