Chapitre 05 Fonctions trigonométriques

Lycée Rascol - Albi

Allez les jeunes Matheux ! ! !

Yves Carrat

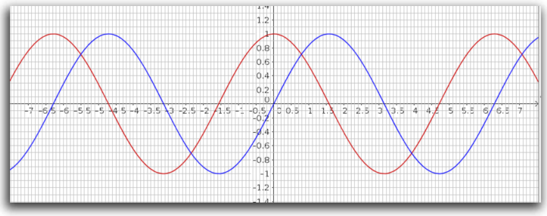


Table des matières

Objectifs

- Réactiver la « petite » trigonométrie du collège (angles aigus)
- Introduire une nouvelle unité d'angles : le radian
- Définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel (angle quelconque)
- Étude des fonctions cosinus et sinus

Rappels élémentaires de trigonométrie

1. La trigonométrie du collège et de la classe de seconde

Dans un triangle rectangle

Rappel

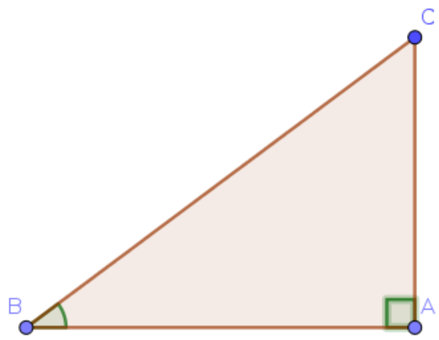
Soit ABC un triangle rectangle en A.

Alors :

$$cos(\widehat{B}) = \frac{\text{côté } adjacent \text{ à } \widehat{B}}{hypoténuse} = \frac{.......}{.......}$$

$$sin(\widehat{B}) = \frac{\text{côté } opposé \text{ à } \widehat{B}}{hypoténuse} = \frac{.......}{.......}$$

$$tan(\widehat{B}) = \frac{\text{côté } opposé \text{ à } \widehat{B}}{\text{côté } adjacent \text{ à } \widehat{B}} = \frac{.......}{.......}$$



Méthode

Dans un triangle rectangle :

Si on connait un des deux angles aigus et la longueur d'un côté, alors on peut calculer la longueur des autres côtés.

.

Si on connaît la longueur de deux côtés, alors on peut calculer les deux angles aigus.

.

D'une façon générale, si l'on connaît deux éléments d'un triangle rectangle, alors on peut calculer l'(es) angle(s) aigu(s) manquant(s) ou le(s) côté(s) manquant(s).

2. Lien avec le cercle trigonométrique

Cercle trigonométrique

Définition

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le **cercle trigonométrique** est le cercle **orienté** de centre O et de rayon 1.

Cosinus et Sinus d'un angle quelconque

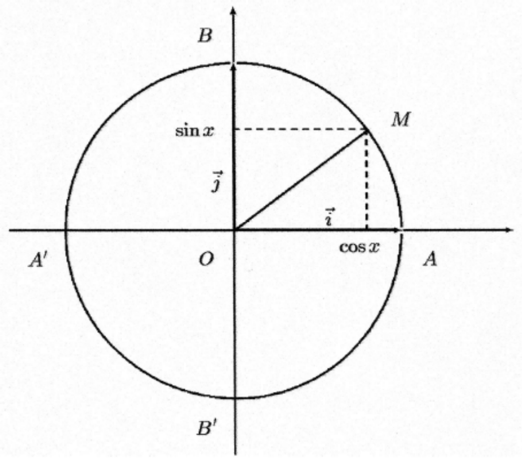
Définition

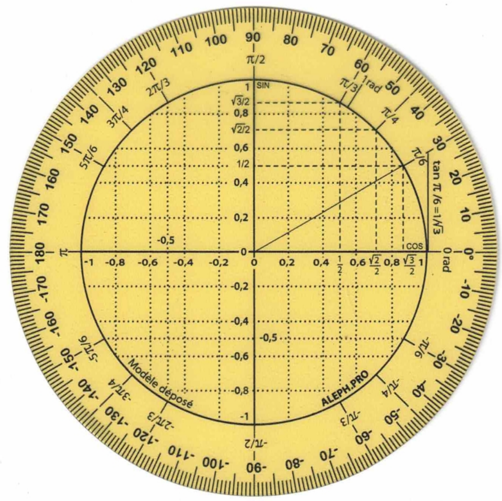
Soit M un point du cercle trigonométrique et soit $\vec{i}$ le premier vecteur du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Si x est la mesure de l'angle entre les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{OM}$, alors :

Le cosinus de x, noté $cos(x)$, est l'abscisse du point M.

Le sinus de x, noté $sin(x)$, est l'ordonnée du point M.





Rapporteur trigonométrique

Conversion degrés - radians

Et la tangente ?

Complément

Soit x un angle tel que $cos(x) \neq 0$.

Alors : $\boxed{tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}}$

Valeurs remarquables des cosinus, sinus et tangentes

Fondamental

x en degrés	0	30	45	60	90
x en radians					
$cos(x)$.					
$sin(x)$.					
$tan(x)$.					

Démonstrations permettant de trouver les valeurs exactes de $sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ — *Fondamental*

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

3. Encadrement de cos(x) et sin(x)

Fondamental

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq cos(x) \leq 1 \;\; et \quad -1 \leq sin(x) \leq 1$

4. Relation fondamentale entre cos(x) et sin(x)

Une égalité à bien connaître... — *Fondamental*

$\forall x \in \mathbb{R}, (cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$

Notations plus compactes

Complément

$cos(x)$ se note souvent simplement $cosx$.

$sin(x)$ se note souvent simplement $sinx$.

$(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$ se note donc simplement ....

Étude des fonctions cosinus et sinus

1. Définitions - Courbes représentatives

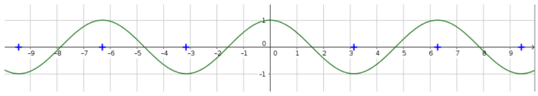
Fonctions "cosinus" et "sinus" *Définition*

La fonction "cosinus" est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.

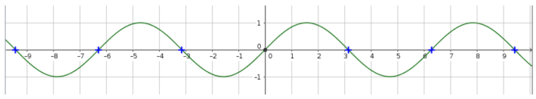
La fonction "sinus" est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.

Courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus *Fondamental*

Courbe de cos sur $[-3\pi; 3\pi]$



Courbe de sin sur $[-3\pi; 3\pi]$



2. Autres propriétés des fonctions cosinus et sinus

Périodicité *Fondamental*

Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.

C'est à dire :

....

Parité *Fondamental*

La fonction cos est paire.

C'est à dire :

....

La fonction sin est impaire.

C'est à dire :

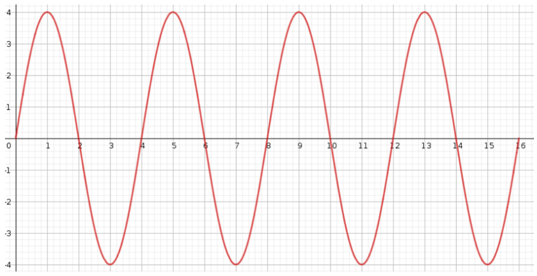
....

3. Fonction trigonométriques utilisées en physique (Ondes notamment)

Avec un sinus

Exemple

$$f(t) = 4sin(\frac{\pi}{2}t)$$



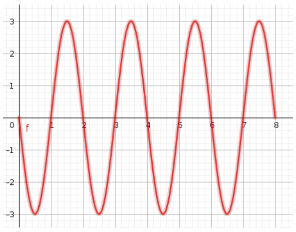
L'amplitude est $A = \dots\dots\dots$

La période est $T = \dots\dots\dots\dots$ (donc la fréquence est $f = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$)

La phase à l'origine est $\phi = \dots\dots\dots$

Avec un cosinus

Exemple



$$g(t) = 3cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

L'amplitude est $A = \dots\dots\dots$

La période est $T = \dots\dots\dots\dots$ (donc la fréquence est $f = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$)

La phase à l'origine est $\phi = \dots\dots\dots$

Amplitude, période, phase d'un signal sinusoïdal

Méthode

Si f est une fonction de la forme $Asin(\omega t + \phi)$ ou encore $Acos(\omega t + \phi)$,

Alors :

L'**amplitude** est A.

La **période** est $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ (et la fréquence est $f = \frac{1}{T}$)

La **phase à l'origine** est ϕ.

La **phase instantanée** est $\omega t + \phi$).

Équations trigonométriques avec cosinus et sinus

1. Équations du type $cos(x) = cos(\theta)$

Angles orientés de même cosinus

Fondamental

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation, d'inconnue x, $cos(x) = cos(\theta)$ sont tous les nombres de la forme :

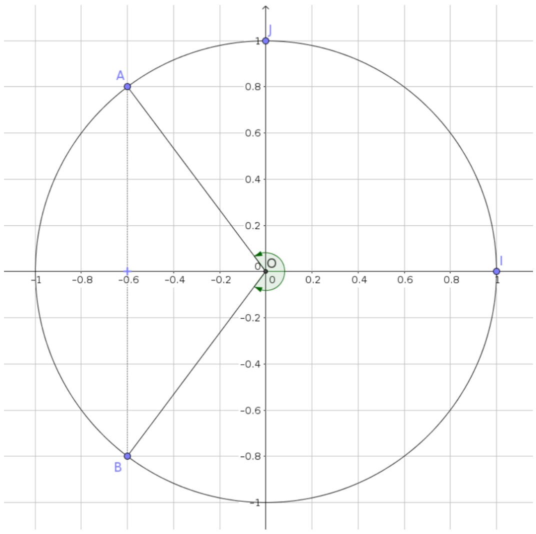
$x = \theta + k2\pi$ et ceux de la forme $x =$ -$\theta + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

.

Autrement dit :

$cos(x) = cos(\theta) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \theta + k2\pi \ \ ou \ \ x =$ -$\theta + k2\pi$.

Résolution de l'équation $cos(x) = cos(\theta)$



Que représente la lettre $\mathbb{Z}$?

Complément

$\mathbb{Z}$ représente l'ensemble des nombres entiers relatifs.

Par exemple : 0 / 1 / 2 / 2018 / -1 / -2 / -1789...

$-2018 \in \mathbb{Z}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi;\pi]$ les équations ci-dessous :

- $cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $cos(x) = \frac{-1}{2}$
- $cos(x) = -1$
- $cos(x) = -1,1$

2. Équations du type $sin(x) = sin(\theta)$

Angles orientés de même sinus — *Fondamental*

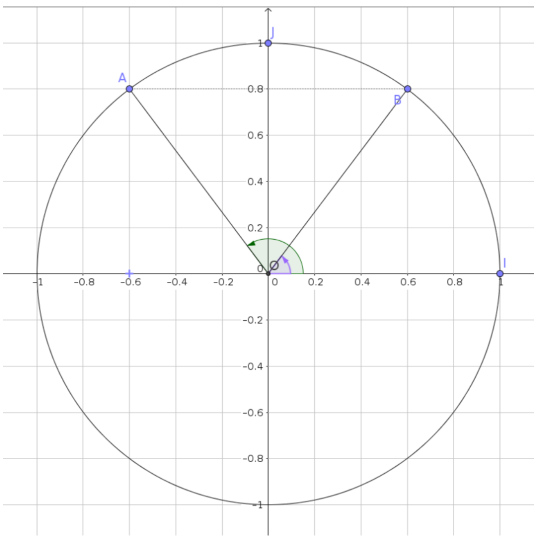
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation, d'inconnue x, $sin(x) = sin(\theta)$ sont tous les nombres de la forme :

$x = \theta + k2\pi$ et ceux de la forme $x = \pi$ - $\theta + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

.

Autrement dit :

$sin(x) = sin(\theta) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \theta + k2\pi \;\; ou \;\; x = \pi$ - $\theta + k2\pi$.



Résolution de l'équation $sin(x) = sin(\theta)$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi;\pi]$ les équations ci-dessous :

- $sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $sin(x) = \frac{1}{2}$
- $sin(x) = 1$
- $sin(x) = -1,1$

Formulaire "en vrac" avec cosinus et sinus

IV

1. Introduction

Dans toute la suite, x est un nombre réel quelconque.

2. Formules déjà revues dans ce chapitre

Fondamental

$cos^2 x + sin^2 x = 1$

$tanx = \frac{sinx}{cosx}$ (seulement Si $cosx \neq 0$)

.

$cos(x + 2\pi) = cosx$

$sin(x + 2\pi) = sinx$

.

$cos(-x) = cosx$

$sin(-x) = -sinx$

3. Autres formules grâce au cercle trigonométrique

Fondamental

- $cos(\pi + x) = -cosx$
- $sin(\pi + x) = -sinx$

.

- $cos(\pi - x) = -cosx$
- $sin(\pi - x) = sinx$

.

- $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sinx$
- $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx$

.

- $cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sinx$
- $sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cosx$